На правах рукописи

Попов Николай Сергеевич

НЕЛОКАЛЬНЫЕ КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ ПСЕВДОПАРАБОЛИЧЕСКИХ И ПСЕВДОГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

01.01.02 – дифференциальные уравнения,
динамические системы и оптимальное управление

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Казань – 2015

Работа выполнена в федеральном государственном автономном образовательном учреждении высшего профессионального образования «Северо-Восточный федеральный университет имени М.К. Аммосова», на кафедре математического анализа Института математики и информатики

Научный руководитель: доктор физико-математических наук,
профессор Кожанов Александр Иванович,
ФГБУН Институт математики
им. С.Л. Соболева СО РАН,
главный научный сотрудник

Официальные оппоненты: доктор физико-математических наук,
профессор Логинов Борис Владимирович,
ФГБОУ ВПО «Ульяновский государственный
технический университет» (г. Ульяновск),
профессор кафедры высшей математики

доктор физико-математических наук,
профессор Федоров Владимир Евгеньевич,
ФГБОУ ВПО «Челябинский государственный
университет» (г. Челябинск), заведующий
кафедрой математического анализа

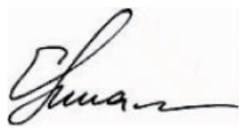
Ведущая организация: ФГБОУ ВО «Московский государственный
университет имени М.В. Ломоносова» (г. Москва)

Защита состоится 29 октября 2015 года в 14 часов 30 минут на заседании диссертационного совета Д 212.081.10 при ФГАОУ ВПО «Казанский (Приволжский) федеральный университет» по адресу: 420008, Россия, Республика Татарстан, г. Казань, ул. Кремлевская, д.35, ауд. 610.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Казанского (Приволжского) федерального университета и на сайте kpfu.ru.

Автореферат разослан «____» «______________» 2015 г.

Ученый секретарь диссертационного совета, кандидат физико-математических наук, доцент



Е.К. Липачев

Актуальность темы. Диссертационная работа посвящена исследованию разрешимости пространственно нелокальных краевых задач для псевдопараболических и псевдогиперболических уравнений. В качестве первых работ в исследовании нелокальных краевых задач отметим работы В.А. Стеклова (1896), Ф.И. Франкля (1956), В.И. Жегалова (1962).

Новый импульс теории нелокальных краевых задач придала работа А.В. Бицадзе и А.А. Самарского (1969). Нелокальные задачи с интегральными условиями ставились и изучались для различных дифференциальных уравнений многими математиками. Обыкновенные дифференциальные уравнения с нелокальными условиями, связывающими значения искомой функции на концах интервала и в его внутренних точках, рассматривались в работах R.C. Brown, A.M. Krall, В.А. Ильина, Е.И. Моисеева, Г.М. Кесельмана, А.Л. Скубачевского, А.А. Шкаликова. Исследованию нелокальных краевых задач для смешанных уравнений математической физики были посвящены работы В.И. Жегалова и его учеников.

Одними из первых работ, посвященных исследованию задач с интегральными условиями для уравнений в частных производных являются работы J.R. Cannon, Л.И. Камынина, опубликованные в 1963 и 1964 годах. Среди последующих работ отметим работы Н.И. Ионкина, Л.А. Муравья и А.В. Филиновского, С.М. Алексеевой и Н.И. Юрчука, A. Bouziani и N-E. Benouar, A. Bouziani, Н.И. Иванчова, J.R. Cannon и Van der Hoek, З.А. Нахушевой, Ю.Т. Сильченко, N. Lazetic, А.И. Кожанова, Л.С. Пулькиной, Г.А. Лукиной, в которых изучались задачи с интегральными условиями для уравнений параболического и гиперболического типов, для некоторых неклассических дифференциальных уравнений.

Цель работы. Основной целью работы является исследование разрешимости пространственно нелокальных краевых задач с граничными условиями А.А. Самарского с переменными коэффициентами и с интегральными условиями для одномерных и многомерных псевдопараболических и псевдогиперболических уравнений третьего порядка.

Методы исследования. Доказываются теоремы существования и единственности решений пространственно нелокальных краевых задач для одномерных и многомерных псевдопараболических и псевдогиперболических уравнений третьего порядка. При доказательстве существования искомого решения рассматриваемых краевых задач используются метод продолжения по параметру, основанный на методе априорных оценок, а также метод Фурье.

Научная новизна. В диссертации получены следующие основные результаты:

• доказаны новые теоремы разрешимости пространственно нелокальных краевых задач с граничными условиями А.А. Самарского для одномерных псевдопараболических и псевдогиперболических уравнений третьего порядка. Для псевдопараболических уравнений доказана однозначная разрешимость краевых задач с нелокальными интегральными краевыми условиями;

• доказаны новые теоремы разрешимости краевых задач с интегральными граничными условиями для многомерных псевдопараболических и псевдогиперболических уравнений третьего порядка;

• доказаны новые теоремы разрешимости краевых задач с нелокальными условиями для псевдопараболических и псевдогиперболических уравнений методом Фурье.

Теоретическая и практическая ценность. Результаты диссертации носят теоретический характер. Все результаты диссертации являются новыми. Выводы и положения, сформулированные в диссертации, базируются на строгих математических доказательствах. Полученные результаты могут быть применены в дальнейших научных исследованиях, а также в образовательном процессе.

Апробация работы. Результаты, полученные в диссертации, докладывались и обсуждались на семинаре при кафедре дифференциальных уравнений Казанского федерального университета под руководством д.ф.-м.н., профессора В.И. Жегалова (Казань, 2015), на объединенном семинаре кафедры математического анализа СВФУ (Якутск, 2014, 2015), НИИ математики СВФУ «Неклассические дифференциальные уравнения, управляемые процессы и их приложения» под руководством д.ф.-м.н., профессора И.Е. Егорова, на семинаре «Неклассические уравнения математической физики» Института математики им. С.Л. Соболева СО РАН под руководством д.ф.-м.н., профессора А.И. Кожанова (Новосибирск, 2012–2014), на Всероссийской научной конференции и Всероссийской школе-семинаре студентов, аспирантов, молодых ученых и специалистов «Математическое моделирование развития северных территорий Российской Федерации» (Якутск, 2012), на XVI–XVIII Международных конференциях студентов, аспирантов и молодых ученых «Ломоносов» (2009–2011, Москва), на II Всероссийской научной конференции студентов, аспирантов, молодых ученых и специалистов «Математическое моделирование развития северных территорий Российской Федерации» (Якутск, 2009), на Всероссийском научном семинаре «Неклассические уравнения математической физики», посвященной 65-летию со дня рождения профессора В.Н. Врагова (Якутск, 2010), на III Международной молодежной научной школе-конференции «Теория и численные методы решения обратных и некорректных задач» (Новосибирск, 2011), на Международной конференции, посвященной 80-летию со дня рождения академика М.М. Лаврентьева «Обратные и некорректные задачи математической физики» (Новосибирск, 2012), на Международной конференции «Актуальные проблемы прикладной математики и информационных технологий - аль-Хорезми 2012» (Ташкент, Узбекистан, 2012), на Международной конференции, посвященной 105-летию со дня рождения С.Л. Соболева (Новосибирск, 2013), на Всероссийской научно-практической конференции студентов, аспирантов и молодых ученых «Молодежь и научно-технический прогресс в современном мире» (Мирный, 2014), на XLVII-LII Международных научных студенческих конференциях «Студент и научно-технический прогресс» (Новосибирск, 2009–2014), на VI и VII Международных конференциях по математическому моделированию (Якутск, 2011, 2014).

Публикации. Основные результаты диссертации опубликованы в 24 работах: 8 статьях [1–8], 16 тезисах докладов [9-24]. В совместных работах [2,3] постановка задач, идея доказательств теорем разрешимости краевых задач I–III принадлежат научному руководителю А.И. Кожанову. 7 статей [1–7] опубликованы в журналах из Перечня рецензируемых научных изданий ВАК, в том числе 4 статьи [1–4] (2 статьи переводные), входят в международные реферативные базы данных и систем цитирования Web of Science, Scopus.

Работа выполнена при поддержке гранта ректора СВФУ на проведение научных исследований студентов и молодых ученых (2009, 2014), аналитической ведомственной целевой программы «Развитие научного потенциала» (коды проекта 2.1.1/3443 и 2.1.1/13607), при поддержке Минобрнауки России в рамках государственного задания на выполнение НИР на 2012–2014 гг. (проект 4402) и ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009–2013 гг. (ГК 02.740.11.0609), ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009-2013 гг. мероприятия 1.3.2 «Проведение научных исследований целевыми аспирантами» (Соглашение 14.132.21.1349).

Структура и объем работы. Диссертация состоит из введения, трех глав, разбитых на 7 параграфов, заключения и списка литературы. Общий объем составляет 118 страниц. Список цитируемой литературы содержит 102 наименования.

Краткое содержание диссертации

Во **введении** обоснована актуальность темы диссертации, даны краткие исторические сведения по теме диссертации, а также кратко описывается содержание работы.

Первая глава, состоящая из трех параграфов, посвящена исследованию разрешимости нелокальных краевых задач для одномерных псевдопараболических уравнений третьего порядка.

Пусть Ω — интервал (0,1) оси Ox, $Q = \Omega \times (0, T)$, $0 < T < +\infty$.

В параграфе 1.1 рассмотрена пространственно нелокальная краевая задача для уравнения

$$u_t - a(x,t)u_{xx} + c(x,t)u - u_{xxt} = f(x,t), \quad (x,t) \in Q, \tag{1}$$

с нелокальными интегральными условиями

$$\int_0^1 H_i(x,t)u(x,t)\,dx = 0, \quad i = 1, 2, \tag{2}$$

где $a(x,t)$, $c(x,t)$, $f(x,t)$, $H_i(x,t)$ $(i = 1, 2)$ — заданные функции определенные при $x \in \overline{\Omega} = [0, 1]$, $t \in [0, T]$.

Краевая задача 1: *найти функцию* $u(x, t)$, *являющуюся в прямоугольнике* Q *решением уравнения* (1), *и такую, что для нее выполняются условия* (2), *а также начальное условие*

$$u(x, 0) = 0, \quad x \in \Omega. \tag{3}$$

В случае локальных краевых условий теоремы разрешимости для уравнения (1), называемого псевдопараболическим или же уравнением Аллера, были доказаны в работах С.Я. Якубова (1999), А.И. Кожанова (1999).

Если умножим исходное уравнение (1) на $H_i(x,t)$ и проинтегрируем по области Ω, то с учетом условий (2) и выполнения условия

$$-H_1(0,t)H_2(1,t) + H_1(1,t)H_2(0,t) \neq 0 \quad t \in [0,T], \tag{4}$$

вместо нелокальных краевых условий (2) получим условия вида

$$\begin{gathered} u_{xt}(0,t) = \alpha_1(t)u_x(0,t) + \alpha_2(t)u_x(1,t) + \alpha_3(t)u_t(0,t) + \alpha_4(t)u_t(1,t) + \\ +\alpha_5(t)u(0,t) + \alpha_6(t)u(1,t) + \int\limits_0^1 K_1(x,t)u(x,t)\,dx + \int\limits_0^1 N_1(x,t)u_t(x,t)\,dx, \end{gathered} \tag{5}$$

$$\begin{gathered} u_{xt}(1,t) = \beta_1(t)u_x(0,t) + \beta_2(t)u_x(1,t) + \beta_3(t)u_t(0,t) + \beta_4(t)u_t(1,t) + \\ +\beta_5(t)u(0,t) + \beta_6(t)u(1,t) + \int\limits_0^1 K_2(x,t)u(x,t)\,dx + \int\limits_0^1 N_2(x,t)u_t(x,t)\,dx, \end{gathered} \tag{6}$$

где $\alpha_k(t)$, $\beta_k(t)$ $(k = 1,\ldots,6)$, $K_l(x,t), N_l(x,t)$ $(l = 1,2)$ — заданные функции определенные при $x \in \overline{\Omega}$, $t \in [0,T]$. Считаем, без ограничения общности,

$$\int\limits_\Omega H_i(x,t)f(x,t)\,dx = 0, \quad i = 1,2.$$

Краевая задача 2: *найти функцию* $u(x,t)$*, являющуюся в прямоугольнике* Q *решением уравнения* (1)*, и такую, что для нее выполняются нелокальные краевые условия* (5), (6)*, а также начальное условие* (3).

Пусть V_0 есть пространство

$$V_0 = \{v(x,t) : v(x,t), v_t(x,t), v_{xx}(x,t), v_{xxt}(x,t) \in L_2(Q), \quad v_x(x,t) \in L_\infty(0,T; W_2^1(\Omega))\}.$$

Теорема 1.1.1. *Пусть выполняются условия*

$$\begin{aligned} & a(x,t) \in C^1(\overline{Q}), \quad c(x,t) \in C^1(\overline{Q}), \quad a(x,t) \geq \overline{a}_0 > 0, \\ & c(x,t) \geq \bar{c}_0 > 0 \quad \textit{при} \quad (x,t) \in \overline{Q}; \\ & \alpha_i(t) \in C^1([0,T]), \quad \beta_i(t) \in C^1([0,T]), \quad i = 1,\ldots,6\,; \\ & K_p(x,t) \in C^1(\overline{Q}), \quad N_p(x,t) \in C^1(\overline{Q}), \quad p = 1,2; \\ & \alpha_4(t) + \beta_4(t) \neq 2, \\ & \int\limits_0^1 xN_2(x,t)[(\alpha_4(t) - \beta_4(t) + 2) - 2(\alpha_4(t) - 1)x]\,dx + \alpha_4(t) + \beta_4(t) \neq 2 \\ & \textit{при} \quad t \in [0,T]; \end{aligned} \tag{7}$$

$$q(\xi_1,\xi_2,t) \equiv \alpha_3(t)\xi_1^2 + (\alpha_4(t) - \beta_3(t))\xi_1\xi_2 - \beta_4(t)\xi_2^2 \geq 0 \quad \textit{при} \quad t \in [0,T], \quad (\xi_1,\xi_2) \in \mathbb{R}^2, \tag{8}$$

$$f(x,t) \in L_2(Q). \tag{9}$$

Тогда существует единственная функция $u(x,t)$ из пространства V_0, являющаяся в прямоугольнике Q решением краевой задачи 2.

Замечание 1.1.1. *Последние два условия в* (7) *выполняются, если заданные функции $\alpha_4(t)$, $\beta_4(t)$, $N_2(x,t)$ малы по абсолютной величине.*

Для доказательства теоремы 1.1.1. рассматривается краевая задача 3, имеющее самостоятельное значение.

Краевая задача 3: *найти функцию $u(x,t)$, являющуюся в прямоугольнике Q решением уравнения* (1), *и такую, что для нее выполняются нелокальные краевые условия*

$$u_{xt}(0,t) = \alpha_1(t)u_x(0,t) + \alpha_2(t)u_x(1,t) + \alpha_3(t)u_t(0,t) + \\ +\alpha_4(t)u_t(1,t) + \alpha_5(t)u(0,t) + \alpha_6(t)u(1,t), \tag{10}$$

$$u_{xt}(1,t) = \beta_1(t)u_x(0,t) + \beta_2(t)u_x(1,t) + \beta_3(t)u_t(0,t) + \\ +\beta_4(t)u_t(1,t) + \beta_5(t)u(0,t) + \beta_6(t)u(1,t), \tag{11}$$

а также начальное условие (3).

Используемые методы основаны на переходе от задачи для «хорошего» уравнения с «плохими» граничными условиями к задаче с «хорошими» граничными условиями, но для «плохого» уравнения — так называемого нагруженного уравнения, доказательстве разрешимости полученной задачи с помощью метода продолжения по параметру и априорных оценок. Ранее подобные методы в близкой ситуации эффективно использовались в работах А.И. Кожанова (2008, 2010).

Параграф 1.2 представляет собой исследование разрешимости пространственно нелокальных краевых задач с граничным условием А.А. Самарского с переменными коэффициентами для одномерных линейных псевдогиперболических уравнений третьего порядка.

В области Q рассматривается уравнение

$$u_{tt} - a(x,t)u_{xx} + c(x,t)u - u_{xxt} = f(x,t), \quad (x,t) \in Q, \tag{12}$$

с нелокальными краевыми условиями 1

$$u_x(0,t) = \alpha_1(t)u(0,t) + \alpha_2(t)u(1,t), \\ u_x(1,t) = \beta_1(t)u(0,t) + \beta_2(t)u(1,t), \tag{13}$$

с нелокальными краевыми условиями 2

$$u(0,t) = \alpha_1(t)u_x(0,t) + \alpha_2(t)u_x(1,t),$$
$$u(1,t) = \beta_1(t)u_x(0,t) + \beta_2(t)u_x(1,t), \tag{14}$$

а также с нелокальными краевыми условиями 3

$$u_x(0,t) = \alpha_1(t)u(0,t) + \alpha_2(t)u_x(1,t),$$
$$u(1,t) = \beta_1(t)u(0,t) + \beta_2(t)u_x(1,t), \tag{15}$$

где $a(x,t)$, $c(x,t)$, $f(x,t)$, $\alpha_1(t)$, $\alpha_2(t)$, $\beta_1(t)$, $\beta_2(t)$ — заданные функции определенные при $x \in \overline{\Omega} = [0,1]$, $t \in [0,T]$.

Краевая задача 4: *найти функцию $u(x,t)$, являющуюся в прямоугольнике Q решением уравнения* (12), *и такую, что для нее выполняются нелокальные краевые условия 1* (13), *а также начальные условия*

$$u(x,0) = 0, \quad u_t(x,0) = 0 \quad x \in \Omega. \tag{16}$$

Краевая задача 5: *найти функцию $u(x,t)$, являющуюся в прямоугольнике Q решением уравнения* (12), *и такую, что для нее выполняются нелокальные краевые условия 2* (14), *а также начальные условия* (16).

Краевая задача 6: *найти функцию $u(x,t)$, являющуюся в прямоугольнике Q решением уравнения* (12), *и такую, что для нее выполняются нелокальные краевые условия 3* (15), *а также начальные условия* (16).

Отметим, что в работе А.И. Кожанова (2009) методом регуляризации и продолжения по параметру была исследована разрешимость начально-краевой задачи для гиперболического уравнения

$$u_{tt} - u_{xx} + c(x,t)u = f(x,t) \tag{17}$$

с краевыми условиями 1, 2 или 3. В случае локальных краевых условий (13) или (14) или (15) — т.е. при выполнении условий $\alpha_2(t) = \beta_1(t) \equiv 0$ — теоремы разрешимости аналогичных краевых задач для уравнений (12) были доказаны в работах С.Я. Якубова, А.И. Кожанова.

Определим пространство V_1:

$$V_1 = \{v(x,t): \quad v(x,t) \in L_\infty(0,T;W_2^2(\Omega)),$$

$$v_t(x,t) \in L_2(0,T;W_2^2(\Omega)) \cap L_\infty(0,T;W_2^1(\Omega)), \quad v_{tt}(x,t) \in L_2(Q)\}.$$

и введем обозначения

$$a_i(x,t) = \frac{\beta_i(t) - \alpha_i(t)}{2}(x-\nu_0)^2 + [\nu_0\beta_i(t) + (1-\nu_0)\alpha_i(t)](x-\nu_0), \quad i = 1,2,$$

$$\Delta(t) = [1 - a_1(0,t)][1 - a_2(1,t)] - a_1(1,t)a_2(0,t),$$

где $\nu_0 \in [0,1]$.

Теорема 1.2.1. *Пусть выполняются условия*

$$\begin{gathered} a(x,t), c(x,t) \in C^1(\overline{Q}), \quad \alpha_i(t) \in C^3([0,T]), \\ \beta_i(t) \in C^3([0,T]), \quad i=1,2; \\ |\Delta(t)| \geq \delta_0 > 0 \quad \textit{при} \quad t \in [0,T]; \end{gathered} \tag{18}$$

$$f(x,t) \in L_2(Q), \quad f_x(x,t) \in L_2(Q). \tag{19}$$

Тогда существует единственная функция $u(x,t)$ из пространства V_1, являющаяся в прямоугольнике Q решением краевой задачи 4.

Замечание 1.2.1. *Условие $|\Delta(t)| \geq \delta_0 > 0$ при любых $t \in [0,T]$ очевидно будет выполнено, если заданные функции $\alpha_i(t)$, $\beta_i(t)$ $(i=1,2)$ малы по абсолютной величине.*

Теорема 1.2.2. *Пусть выполняются условия*

$$\begin{gathered} a(x,t), c(x,t) \in C^2(\overline{Q}),\ \alpha_i(t), \beta_i(t) \in C^3([0,T]),\ i=1,2; \\ (\beta_2(t) - \alpha_1(t) + 1)^2 \leq 4(\alpha_2(t)\beta_1(t) - \alpha_1(t)\beta_2(t)) \quad \textit{при} \quad t \in [0,T]; \\ \beta_1(t) + \alpha_2(t) = 0 \quad \textit{при} \quad t \in [0,T]; \\ \alpha_1(t)\xi_1^2 + 2\alpha_2(t)\xi_1\xi_2 - \beta_2(t)\xi_2^2 \geq 0 \quad \textit{при} \quad t \in [0,T], \quad \xi \in \mathbb{R}^2; \end{gathered} \tag{20}$$

$$\begin{aligned} &\exists\, \mu_0 \in (0; 3/2): \\ &[\mu_0 + 5\alpha_1'(t)]\,\xi_1^2 + 4\alpha_2'(t)\xi_1\xi_2 + [\mu_0 - 5\beta_2'(t)]\xi_2^2 \geq 0 \\ &\textit{при} \quad t \in [0,T], \quad \xi \in \mathbb{R}^2; \end{aligned} \tag{21}$$

$$\begin{aligned} &f(x,t) \in L_2(Q), \quad f_t(x,t) \in L_2(Q), \quad f_{xt}(x,t) \in L_2(Q), \\ &f(x,0) \equiv 0 \quad \textit{при} \quad x \in \overline{\Omega} \quad \textit{и} \quad f_x(0,0) = f_x(1,0) \equiv 0. \end{aligned} \tag{22}$$

Тогда существует единственная функция $u(x,t)$ из пространства V_1, являющаяся в прямоугольнике Q решением краевой задачи 5.

Замечание 1.2.2. *Условия* (20) *очевидно будут выполнены при любых $t \in [0,T]$, если для заданных функций выполняется $\alpha_1(t)\beta_2(t) < 0$ и $\beta_2(t) - \alpha_1(t) + 1$, $\alpha_2(t)$ или $\beta_1(t)$ малы по абсолютной величине.*

Теорема 1.2.3. *Пусть выполняются условия*

$$\begin{gathered} a(x,t), c(x,t) \in C^2(\overline{Q}),\ \alpha_i(t), \beta_i(t) \in C^3([0,T]), \quad i=1,2; \\ \alpha_2(t) \geq -1, \quad \beta_2(t) \leq 0 \quad \textit{при} \quad t \in [0,T]; \\ \beta_2'(t) \leq 0, \quad \alpha_2(t) = \beta_1(t) \quad \textit{при} \quad t \in [0,T]; \end{gathered} \tag{23}$$

$$\begin{aligned} &f(x,t) \in L_2(Q), \quad f_t(x,t) \in L_2(Q), \quad f_{xt}(x,t) \in L_2(Q), \\ &f(x,0) \equiv 0 \quad \textit{при} \quad x \in \overline{\Omega} \quad \textit{и} \quad f_x(1,0) \equiv 0. \end{aligned} \tag{24}$$

Тогда существует единственная функция $u(x,t)$ из пространства V_1, являющаяся в прямоугольнике Q решением краевой задачи 6.

В параграфе 1.3 исследуется разрешимость пространственно нелокальных краевых задач для одномерных линейных псевдопараболических уравнений с граничным условием, представляющим собой комбинацию нелокальных граничных условий А.А. Самарского с переменными коэффициентами и граничных условий интегрального вида. Подобные нелокальные задачи для псевдопараболических уравнений ранее изучались лишь в частных случаях (см. работы А.П. Солдатова, М.Х. Шханукова (1987), А.И. Кожанова (2004)).

В области Q рассматривается уравнение

$$u_t - a(x,t)u_{xx} + c(x,t)u - u_{xxt} = f(x,t), \quad (x,t) \in Q \tag{25}$$

с нелокальными краевыми условиями 1

$$\begin{aligned} u_x(0,t) &= \alpha_1(t)u(0,t) + \alpha_2(t)u(1,t) + \int\limits_0^1 K_1(x)u(x,t)\,dx, \\ u_x(1,t) &= \beta_1(t)u(0,t) + \beta_2(t)u(1,t) + \int\limits_0^1 K_2(x)u(x,t)\,dx, \end{aligned} \tag{26}$$

с нелокальными краевыми условиями 2

$$\begin{aligned} u_x(0,t) &= \alpha_1(t)u(0,t) + \alpha_2(t)u_x(1,t) + \int\limits_0^1 K_1(x)u(x,t)\,dx, \\ u(1,t) &= \beta_1(t)u(0,t) + \beta_2(t)u_x(1,t) + \int\limits_0^1 K_2(x)u(x,t)\,dx, \end{aligned} \tag{27}$$

а также с нелокальными краевыми условиями 3

$$\begin{aligned} u(0,t) &= \alpha_1(t)u_x(0,t) + \alpha_2(t)u_x(1,t) + \int\limits_0^1 K_1(x)u(x,t)\,dx, \\ u(1,t) &= \beta_1(t)u_x(0,t) + \beta_2(t)u_x(1,t) + \int\limits_0^1 K_2(x)u(x,t)\,dx, \end{aligned} \tag{28}$$

где $a(x,t)$, $c(x,t)$, $K_1(x)$, $K_2(x)$, $f(x,t)$, $\alpha_1(t)$, $\alpha_2(t)$, $\beta_1(t)$, $\beta_2(t)$ — заданные функции определенные при $x \in \overline{\Omega} = [0,1]$, $t \in [0,T]$.

Краевая задача 7: *найти функцию $u(x,t)$, являющуюся в прямоугольнике Q решением уравнения* (25)*, и такую, что для нее выполняются нелокальные краевые условия* 1 (26)*, а также начальные условия*

$$u(x,0) = 0, \quad x \in \Omega. \tag{29}$$

Краевая задача 8: *найти функцию $u(x,t)$, являющуюся в прямоугольнике Q решением уравнения* (25)*, и такую, что для нее выполняются нелокальные краевые условия* 2 (27)*, а также начальные условия* (29).

Краевая задача 9: *найти функцию $u(x,t)$, являющуюся в прямоугольнике Q решением уравнения* (25), *и такую, что для нее выполняются нелокальные краевые условия* 3 (28), *а также начальные условия* (29).

Определим пространство

$$V_2 = \{v(x,t): \ v(x,t) \in L_\infty(0,T; W_2^2(\Omega)),$$

$$v_t(x,t) \in L_2(0,T; W_2^1(\Omega)), \quad v_{xxt}(x,t) \in L_2(Q)\}.$$

Приведены теоремы 1.3.1, 1.3.2, 1.3.3 однозначной разрешимости краевых задач 7, 8, 9 соответственно [2,3].

Во второй главе, состоящей из двух параграфов, исследована разрешимость многомерных пространственно нелокальных краевых задач для псевдопараболических, псевдогиперболических уравнений. В многомерном случае исследования подобных задач ранее относились к параболическим и гиперболическим уравнениям, многомерные псевдопараболические, псевдогиперболические задачи с интегральным условием на боковой границе ранее не изучались.

В **§2.1** рассматриваются псевдопараболические уравнения. Пусть Ω — ограниченная область пространства $\mathbb{R}^n$ с гладкой (для простоты, бесконечно-дифференцируемой) границей Γ, Q — цилиндр $\Omega \times (0,T)$ $(0 < T < +\infty)$, $S = \Gamma \times (0,T)$ — его боковая граница, $a(x,t)$, $c(x,t)$ и $f(x,t)$ — функции, заданные в цилиндре $\overline{Q}$, $u_0(x)$ — функция, заданная на множестве $\overline{\Omega}$, $K(x,y,t)$ — функция, заданная при $x \in \overline{\Omega}$, $y \in \overline{\Omega}$, $t \in [0,T]$.

Краевая задача 10: *найти функцию $u(x,t)$, являющуюся в цилиндре Q решением уравнения*

$$Lu \equiv \frac{\partial}{\partial t}\Big(u - \Delta u\Big) - a(x,t)\Delta u + c(x,t)u = f(x,t), \tag{30}$$

и такую, что для нее выполняются условия

$$u(x,0) = u_0(x), \quad x \in \Omega, \tag{31}$$

$$u(x,t)|_{(x,t)\in S} = \int\limits_\Omega K(x,y,t)u(y,t)dy|_{(x,t)\in S}. \tag{32}$$

Краевая задача 11: *найти функцию $u(x,t)$, являющуюся в цилиндре Q решением уравнения* (30), *и такую, что для нее выполняются условия* (31) *и условие*

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial \nu(x)}\Big|_{(x,t)\in S} = \int\limits_\Omega K(x,y,t)u(y,t)dy\Big|_{(x,t)\in S}, \tag{33}$$

где $\nu(x) = (\nu_1, \ldots, \nu_n)$ — вектор внутренней нормали к Γ в текущей точке.

Пусть

$$V_3 = \left\{ v(x,t): \quad v \in W_2^{2,1}(Q) \cap L_\infty(0,T; W_2^2(\Omega)), \quad v_t \in L_2(0,T; W_2^2(\Omega)) \right\}.$$

Определим оператор M по формуле

$$(Mu)(x,t) = u(x,t) - \int\limits_\Omega K(x,y,t)u(y,t)dy.$$

Пусть оператор M однозначно и непрерывно обратим как оператор из $L_2(\Omega)$ в $L_2(\Omega)$ при всех $t \in [0,T]$, и существуют положительные постоянные m_1, m_2 такие, что выполняются неравенства

$$m_1 \int\limits_\Omega u^2(x,t)\,dx \leq \int\limits_\Omega [Mu(x,t)]^2\,dx \leq m_2 \int\limits_\Omega u^2(x,t)\,dx \tag{34}$$

при любых $t \in [0,T]$ и $u(x,t) \in L_\infty(0,T; L_2(\Omega))$.

Введем обозначения

$$\begin{aligned} P_0 &= \max_{t\in[0,T]} \int\limits_\Omega \int\limits_\Omega (\Delta_x K)^2(x,y,t)\,dxdy, \\ Q_0 &= \max_{t\in[0,T]} \int\limits_\Omega \int\limits_\Omega K^2(x,y,t)\,dxdy. \end{aligned} \tag{35}$$

Теорема 2.1.1. *Пусть выполняются условие* (34), а также условия

$$\begin{gathered} a(x,t),\ c(x,t) \in C^1(\overline{Q}), \\ a(x,t) \geq a_0 > 0, \quad c(x,t) \geq c_0 > 0 \quad \textit{при} \quad (x,t) \in \overline{Q}; \\ K(x,y,t) \in C^3(\overline{\Omega} \times \overline{\Omega} \times [0,T]), \end{gathered} \tag{36}$$

$$1 - \delta_0^2 - \frac{P_0}{\delta_0^2 m_1} > 0, \quad 1 - \frac{Q_0}{\delta_0^2 m_1} > 0 \quad \textit{при} \quad \delta_0 \in \left(0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right); \tag{37}$$

$$f(x,t) \in L_2(Q), \quad u_0(x) \in \overset{\circ}{W}{}_2^2(\Omega). \tag{38}$$

Тогда краевая задача 10 *имеет решение* $u(x,t)$*, принадлежащее пространству* V_3*, и это решение единственно.*

Пусть $K_1(x,y,t)$ — функция, определенная на множестве $\overline{\Omega} \times \overline{\Omega} \times [0,T]$ и такая, что при $(x,y,t) \in \Gamma \times \Omega \times (0,T)$ выполняется равенство

$$\frac{\partial K_1(x,y,t)}{\partial \nu(x)} = K(x,y,t)$$

С помощью $K_1(x,y,t)$ определим оператор M_1

$$(M_1 u)(x,t) = u(x,t) - \int\limits_\Omega K_1(x,y,t)u(y,t)dy.$$

Пусть оператор M_1 однозначно и непрерывно обратим как оператор из $L_2(\Omega)$ в $L_2(\Omega)$ при всех $t \in [0,T]$ и существуют положительные постоянные m_3, m_4 такие, что выполняются неравенства

$$m_3 \int\limits_\Omega u^2(x,t)\,dx \le \int\limits_\Omega [M_1 u(x,t)]^2\,dx \le m_4 \int\limits_\Omega u^2(x,t)\,dx \tag{39}$$

при любых $t \in [0,T]$ и $u(x,t) \in L_\infty(0,T;L_2(\Omega))$.

Введем обозначения

$$\begin{aligned} P_1 &= \max_{t\in[0,T]} \int\limits_\Omega\int\limits_\Omega (\Delta_x K_1)^2(x,y,t)\,dxdy, \\ Q_1 &= \max_{t\in[0,T]} \int\limits_\Omega\int\limits_\Omega K_1^2(x,y,t)\,dxdy. \end{aligned} \tag{40}$$

Теорема 2.1.2. *Пусть выполняются условие* (39), а также условия

$$\begin{gathered} a(x,t),\ c(x,t) \in C^1(\overline{Q}), \\ a(x,t) \ge a_0 > 0, \quad c(x,t) \ge c_0 > 0 \quad \textit{при} \quad (x,t) \in \overline{Q}; \\ K_1(x,y,t) \in C^3(\overline{\Omega}\times\overline{\Omega}\times[0,T]), \end{gathered} \tag{41}$$

$$1 - \delta_0^2 - \frac{P_1}{\delta_0^2 m_3} > 0, \quad 1 - \frac{Q_1}{\delta_0^2 m_3} > 0 \quad \textit{при} \quad \delta_0 \in \left(0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right); \tag{42}$$

$$f(x,t) \in L_2(Q), \quad u_0(x) \in W_2^1(\Omega). \tag{43}$$

Тогда краевая задача 11 *имеет решение $u(x,t)$, принадлежащее пространству V_3, и это решение единственно.*

Замечание 2.1.1. В теореме 2.1.1 условия малости на функции $K(x,y,t)$, $\Delta_x K(x,y,t)$ можно заменить на условия симметричности $K(x,y,t) = K(y,x,t)$ и обращения в нуль на границе:

$$K(x,y,t) = K_{y_i}(x,y,t) = 0 \ (i = 1,\dots,n) \quad \text{при} \quad y \in \Gamma.$$

Аналогичное верно для функции для функции $K_1(x,y,t)$ в случае теоремы 2.1.2.

Замечание 2.1.2. В теоремах 2.1.1 и 2.1.2 от условий $a(x,t) \ge a_0 > 0$, $c(x,t) \ge c_0 > 0$ можно отказаться, но тогда, как и выше, при получении априорных оценок возникнут условия малости на функции $a(x,t)$, $c(x,t)$ и их производные.

В **§2.2** рассматриваются псевдогиперболические уравнения.

Краевая задача 12: *найти функцию $u(x,t)$ являющуюся в цилиндре Q решением уравнения*

$$\begin{aligned} Lu &\equiv \frac{\partial}{\partial t}\Big(u_t - \Delta u\Big) - Bu = f(x,t), \\ Bu &\equiv \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i}(b^{ij}(x)u_{x_j}) + b(x,t)u, \end{aligned} \tag{44}$$

и такую, что для нее выполняются условия

$$u(x,0) = u_0(x), \quad u_t(x,0) = u_1(x), \quad x \in \Omega, \tag{45}$$

$$u(x,t)|_{(x,t)\in S} = \int\limits_\Omega K(x,y,t)u(y,t)dy|_{(x,t)\in S}. \tag{46}$$

Краевая задача 13: *найти функцию $u(x,t)$, являющуюся в цилиндре Q решением уравнения* (44)*, и такую, что для нее выполняются начальные условия* (45) *и условие*

$$\left.\frac{\partial u(x,t)}{\partial \nu(x)}\right|_{(x,t)\in S} = \left.\int\limits_\Omega K(x,y,t)u(y,t)dy\right|_{(x,t)\in S}, \tag{47}$$

где $\nu(x) = (\nu_1, \ldots, \nu_n)$ — вектор внутренней нормали к Γ в текущей точке.

Предполагаем выполнение условия эллиптичности и симметричности на оператор B:

$$b^{ij}(x) = b^{ji}(x), \ \sum_{i,j=1}^n b^{ij}(x)\xi_i\xi_j \geq \alpha(\xi_1^2 + \xi_2^2 + \ldots + \xi_n^2), \ \alpha > 0, \ \xi_i \in \mathbb{R}^n. \tag{48}$$

Определим оператор M по формуле

$$(Mu)(x,t) = u(x,t) - \int\limits_\Omega K(x,y,t)u(y,t)dy.$$

Пусть оператор M однозначно и непрерывно обратим как оператор из $L_2(\Omega)$ в $L_2(\Omega)$ при всех $t \in [0,T]$, и существуют положительные постоянные m_1, m_2 такие, что выполняются неравенства

$$m_1 \int\limits_\Omega u^2(x,t)\,dx \leq \int\limits_\Omega [Mu(x,t)]^2\,dx \leq m_2 \int\limits_\Omega u^2(x,t)\,dx \tag{49}$$

при любых $t \in [0,T]$ и $u(x,t) \in L_\infty(0,T;L_2(\Omega))$.

Определим пространство V_4:

$$\begin{aligned} V_4 = \{v(x,t): \quad & v_t(x,t) \in L_2(0,T;W_2^2(\Omega)) \cap L_\infty(0,T;W_2^1(\Omega)), \\ & v(x,t) \in L_\infty(0,T;W_2^2(\Omega)), \quad v_{tt}(x,t) \in L_2(Q)\}. \end{aligned} \tag{50}$$

Введем обозначение

$$Q_0 = \max_{t\in[0,T]} \int\limits_\Omega \int\limits_\Omega K^2(x,y,t)\,dxdy. \tag{51}$$

Теорема 2.2.1. *Пусть выполняются условия* (48)*,* (49), а также условия

$$\begin{gathered} b(x,t) \in C^1(\overline{Q}), \quad b^{ij}(x) \in C_0^1(\overline{\Omega}) \quad (i,j = 1,\ldots,n), \\ -b(x,t) \geq b_0 > 0 \quad \textit{при} \quad (x,t) \in \overline{Q}; \\ K(x,y,t) \in C^3(\overline{\Omega} \times \overline{\Omega} \times [0,T]), \end{gathered} \tag{52}$$

$$1 - \frac{Q_0}{\delta_0^2 m_1} > 0 \quad \textit{при} \quad \delta_0 \in \left(0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right); \tag{53}$$

$$f(x,t) \in L_2(Q), \quad u_0(x) \in W_2^2(\Omega) \cap \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega), \quad u_1(x) \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega). \tag{54}$$

Тогда краевая задача 12 *имеет решение* $u(x,t)$*, принадлежащее пространству* V_4*, и это решение единственно.*

Введем обозначение

$$Q_1 = \max_{t\in[0,T]} \int\limits_{\Gamma} \int\limits_{\Omega} K^2(x,y,t)\, dy dS_x. \tag{55}$$

Теорема 2.2.2. *Пусть выполняются условия*

$$\begin{gathered} b^{ij}(x) = b^{ji}(x), \quad \alpha \sum_{i=1}^{n} \xi_i^2 \le \\ \le \sum_{i,j=1}^{n} b^{ij}(x)\xi_i\xi_j \le \beta \sum_{i=1}^{n} \xi_i^2, \quad \alpha,\beta > 0, \quad \xi = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n, \end{gathered} \tag{56}$$

кроме того

$$\begin{gathered} b(x,t) \in C^1(\overline{Q}), \quad b^{ij}(x) \in C_0^1(\overline{\Omega}) \quad (i,j = 1,\ldots,n), \\ -b(x,t) \ge b_0 > 0 \quad \text{при} \quad (x,t) \in \overline{Q}; \\ K(x,y,t) \in C^3(\overline{\Omega} \times \overline{\Omega} \times [0,T]), \end{gathered} \tag{57}$$

$$1 - 4Q_1 > 0, \quad 2 - \delta_2 - \delta_2\beta > 0 \quad \text{при} \quad \delta_2 \in \left(0, \frac{2}{1+\beta}\right); \tag{58}$$

$$u_0(x) \in W_2^2(\Omega) \cap W_2^1(\Omega), \quad u_1(x) \in W_2^1(\Omega), \quad f(x,t) \in L_2(Q). \tag{59}$$

Тогда краевая задача 13 *имеет решение* $u(x,t)$*, принадлежащее пространству* V_4*, и это решение единственно.*

Замечание 2.2.1. В теоремах 2.2.1 и 2.2.2 от условий $-b(x,t) \ge b_0 > 0$ можно отказаться, но тогда, как и выше, при получении априорных оценок возникнут условия малости на функцию $b(x,t)$ и их производные.

В третьей главе, состоящей из двух параграфов, исследована разрешимость пространственно нелокальных краевых задач для псевдопараболических, псевдогиперболических уравнений с постоянными коэффициентами, но с общими нелокальными краевыми условиями А.А. Самарского и интегральными условиями с переменными коэффициентами.

В **§3.1** проводится исследование разрешимости пространственно нелокальных краевых задач с интегральными граничными условиями, условиями А.А. Самарского с переменными коэффициентами для одномерных линейных псевдопараболических уравнений.

Пусть Ω — интервал $(0,1)$ оси Ox, Q — прямоугольник $\Omega \times (0,T)$, $0 < T < +\infty$. В области Q рассматривается уравнение

$$u_t - u_{xxt} - \alpha u_{xx} = f(x,t), \quad (x,t) \in Q, \tag{60}$$

с нелокальными краевыми условиями

$$\begin{aligned} u_x(0,t) &= \alpha_1(t)u(0,t) + \alpha_2(t)u(1,t) + \int\limits_0^1 K_1(x)u(x,t)\,dx, \\ u_x(1,t) &= \beta_1(t)u(0,t) + \beta_2(t)u(1,t) + \int\limits_0^1 K_2(x)u(x,t)\,dx, \end{aligned} \tag{61}$$

где $f(x,t)$, $\alpha_1(t)$, $\alpha_2(t)$, $\beta_1(t)$, $\beta_2(t)$, $K_1(x)$, $K_2(x)$ — заданные функции определенные при $x \in \overline{\Omega} = [0,1]$, $t \in [0,T]$, α — постоянная.

Краевая задача 14: *найти функцию $u(x,t)$, являющуюся в прямоугольнике Q решением уравнения* (60), *и такую, что для нее выполняются нелокальные краевые условия* (61), *а также начальные условия*

$$u(x,0) = 0, \quad x \in \Omega. \tag{62}$$

С помощью метода Фурье разрешимость краевой задачи 14 эквивалентно сводится к разрешимости системы интегральных уравнений Вольтерры

$$P_1(t)\vec{\phi}(t) + \int_0^t G(t,\tau)\vec{\phi}(\tau)\,d\tau = \vec{F}(t), \quad \vec{\phi}(t) = (\varphi(t), \psi(t)), \tag{63}$$

где $P_1(t)$, $G(t,\tau)$ — матрицы второго порядка с коэффициентами, определяемые через входные данные краевой задачи 14.

Теорема 3.1.1. *Пусть выполняются условия*

$$\begin{gathered} \alpha_i(t) \in C^1([0,T]), \quad \beta_i(t) \in C^1([0,T]), \quad i = 1,2\,; \\ K_p(x) \in C^1(\overline{\Omega}), \quad p = 1,2; \quad \det|P_1(t)| \neq 0, \quad \forall t \in [0;T], \\ f(x,t) \in L_2(Q). \end{gathered} \tag{64}$$

Тогда существует единственная функция $u(x,t)$ из пространства V_0, являющаяся в прямоугольнике Q решением краевой задачи (60)*–*(62).

Замечание 3.1.1. Пусть $\alpha_1(t) = \alpha_2(t) = \beta_1(t) = \beta_2(t) \equiv 0$, $K_1(x) \equiv 0$. Вместо (64) имеем следующее интегральное уравнение

$$p_1\psi(t) + \int\limits_0^t m(t,\tau)\psi(\tau)\,d\tau = F_2(t), \tag{65}$$

где условие $p_1 \neq 0$ эквивалентно выполнению неравенства $\int\limits_0^1 K_2(x)\left[\frac{5}{6} + \frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} 1}\right]dx \neq 1$.

В **§3.2** проводится исследование разрешимости пространственно нелокальных краевых задач, для простоты, с интегральными граничными условиями с переменными коэффициентами для одномерных линейных псевдогиперболических уравнений.

В области Q рассматривается уравнение

$$u_{tt} - \alpha u_{xx} - u_{xxt} = f(x,t) \quad (x,t) \in Q, \tag{66}$$

с нелокальными краевыми условиями

$$u_x(0,t) = \int\limits_0^1 K_1(x)u(x,t)\,dx, \quad u_x(1,t) = \int\limits_0^1 K_2(x)u(x,t)\,dx. \tag{67}$$

где $f(x,t)$, $K_1(x)$, $K_2(x)$ — заданные функции определенные при $x \in \overline{\Omega} = [0,1]$, $t \in [0,T]$, α — постоянная.

Краевая задача 15. *Найти функцию $u(x,t)$, являющуюся в прямоугольнике Q решением уравнения* (66)*, и такую, что для нее выполняются нелокальные краевые условия* (67)*, а также начальные условия*

$$u(x,0) = u_0(x), \quad u_t(x,0) = u_1(x), \quad x \in \Omega. \tag{68}$$

Как и в параграфе 3.1 разрешимость краевой задачи 15 эквивалентно редуцируется к разрешимости системы интегральных уравнений Вольтерры

$$P_2(t)\vec{\phi}(t) + \int_0^t M(\tau - t)\vec{\phi}(\tau)\,d\tau = \vec{F}(t), \quad \vec{\phi}(t) = (\varphi(t), \psi(t)), \tag{69}$$

где $P_2(t)$, $M(\tau - t)$ — матрицы второго порядка с коэффициентами, определяемыми через входные данные краевой задачи 15.

Теорема 3.1.2. *Пусть выполняются условия*

$$\begin{gathered} K_p(x) \in C(\overline{\Omega}), \quad p = 1,2; \quad \det|P_2(t)| \neq 0, \quad \forall t \in [0;T]; \\ \alpha < 0, \quad f(x,t) \in L_2(Q). \end{gathered} \tag{70}$$

Тогда существует единственная функция $u(x,t)$ из пространства V_1, являющаяся в прямоугольнике Q решением краевой задачи (66)*–*(68).

Замечание 3.2.1. Как в замечании 3.1.1 рассмотрим случай, когда $K_1(x) \equiv 0 \quad \forall x \in [0;1]$. Имеем следующее интегральное уравнение

$$p_2\psi(t) + \int\limits_0^t m(\tau - t)\psi(\tau)\,d\tau = F_2(t), \tag{71}$$

где условие $p_2 \neq 0$ эквивалентно выполнению неравенства $\int\limits_0^1 K_2(x)\,dx \neq \frac{6}{11}$.

Автор выражает глубокую благодарность научному руководителю профессору Александру Ивановичу Кожанову за постановку задач, ценные советы, помощь в работе над диссертацией и постоянное внимание к работе.

РАБОТЫ АВТОРА ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

[1] **Попов, Н.С. Разрешимость краевой задачи для псевдогиперболического уравнения с нелокальными интегральными условиями / Н.С. Попов // Дифференциальные уравнения. – 2015. – Т.51, № 3. – С. 359–372.**

[2] **Попов, Н.С. О разрешимости некоторых задач со смещением для псевдопараболических уравнений / А.И. Кожанов, Н.С. Попов // Вестник НГУ. Серия: Математика, механика, информатика. – 2010. Т.10, Выпуск 3. – С. 63–75.**

[3] **Popov, N.S. Solvability of nonlocal boundary value problems for pseudoparabolic equations / A.I. Kozhanov, N.S. Popov // Journal of Mathematical Sciences. – 2012. Vol.186, №. 3. – P. 438–452**

[4] **Popov, N.S. Solvability of a boundary value problem for a pseudoparabolic equation with nonlocal integral conditions / N.S. Popov // Differential Equations. – 2015. – V.51, № 3. – P. 362–375.**

[5] **Попов, Н.С. О разрешимости краевых задач для многомерных псевдогиперболических уравнений с нелокальным граничным условием интегрального вида / Н.С. Попов // Математические заметки СВФУ. – 2014. – Т.21, № 2. – С. 69–80.**

[6] **Попов, Н.С. О разрешимости пространственно нелокальной краевой задачи для псевдогиперболического уравнения / Н.С. Попов // Математические заметки ЯГУ. – 2013. Т.20, Вып. 2. – С.152–169.**

[7] **Попов, Н.С. О разрешимости краевых задач для многомерных псевдопараболических уравнений с нелокальным граничным условием интегрального вида / Н.С. Попов // Математические заметки ЯГУ. – 2012. Т.19, Вып. 1. – С. 82–95.**

[8] Попов, Н.С. Об одной краевой задаче для псевдопараболического уравнения с нелокальными условиями типа Самарского / Н.С. Попов // Лучшие доклады общеуниверситетской научной конференции студентов СВФУ имени М.К. Аммосова (18 мая 2009 г.) – Якутск: Издательско-полиграфический комплекс СВФУ, 2010. – С. 20–23.

[9] Попов, Н.С. Разрешимость задачи со смещением для псевдопараболического уравнения / Н.С. Попов // Тезисы докладов секции «Математика и механика» Международной конференции студентов, аспирантов, молодых ученых «Ломоносов-2009». – Москва: ММФ МГУ имени М.В. Ломоносова, 2009. – С. 55–56.

[10] Попов, Н.С. О разрешимости некоторых задач со смещением для псевдопараболических уравнений / Н.С. Попов // Материалы Международного научного форума «Ломоносов-2010»: Математика / Отв. ред. И.А. Алешковский, П.Н. Костылев, А.И. Андреев, А.В. Андриянов. Электронный ресурс. – М.: Макс Пресс, 2010. – Секция 14-1. №$45_9 82_2$883. – С. 1–2.

[11] Попов, Н.С. О разрешимости нелокальной краевой задачи для псевдопараболического уравнения с интегральным смещением / Н.С. Попов // Всероссийский научный семинар «Неклассические уравнения математической физики», посвященной 65-летию со дня рождения профессора В.Н. Врагова. Часть II: Тез. докл. – Якутск, 10-13 ноября 2010

г. – С. 26–27.

[12] Попов, Н.С. Разрешимость краевой задачи с нелокальными интегральными краевыми условиями для псевдопараболического уравнения / Н.С. Попов // Материалы XLIX Международной научной студенческой конференции «Студент и научно-технический прогресс»: Математика / – Новосибирск: изд-во НГУ, 2011. – С. 58.

[13] Попов, Н.С. Об одной краевой задаче с нелокальными интегральными краевыми условиями для псевдопараболического уравнения / Н.С. Попов // Материалы Международного молодежного научного форума «Ломоносов-2011»: Подсекция «Математика» / Отв. ред. А.И. Андреев, А.В. Андриянов, Е.А. Антипов, М.В. Чистякова. [Электронный ресурс] – М.: МАКС Пресс, 2011. – С. 132.

[14] Попов, Н.С. Исследование краевой задачи для псевдопараболического уравнения с нелокальными интегральными краевыми условиями / Н.С. Попов // VI Международная конференция по математическому моделированию. Тез. докл. / Под редакцией И.Е. Егорова, В.И. Васильева – Якутск: ОАО «Медиа-холдинг Якутия», 2011. – С. 55–57.

[15] Попов, Н.С. Разрешимость краевой задачи для псевдопараболического уравнения с нелокальными интегральными условиями / Н.С. Попов // III Международная молодежная научная школа-конференция «Теория и численные методы решения обратных и некорректных задач»: Тез. докл. – Новосибирск: изд-во ИВМиМГ СО РАН, 2011. – С. 47–48.

[16] Попов, Н.С. Разрешимость краевой задачи для псевдопараболического уравнения с нелокальным условием интегрального вида / Н.С. Попов // Материалы 50-й юбилейной Международной научной студенческой конференции «Студент и научно-технический прогресс»: Математика / Новосибирск: изд-во НГУ, 2012. – С. 40.

[17] Попов, Н.С. О разрешимости краевых задач для неклассических уравнений третьего порядка с нелокальными граничными условиями интегрального вида / Н.С. Попов // Международная конференция, посвященная 80-летию со дня рождения академика М.М. Лаврентьева «Обратные и некорректные задачи математической физики». (Новосибирск, 5-12 августа 2012 г.): Тез.докл. – Новосибирск: ЗАО «Сибирское научное изд-во», 2012. – С. 420.

[18] Попов, Н.С. Разрешимость краевой задачи для псевдогиперболического уравнения с нелокальными интегральными условиями / Н.С. Попов // IV Международная молодежная научная школа-конференция «Теория и численные методы решения обратных и некорректных задач». (Новосибирск, 5–15 августа 2012 г.): Тез.докл. – Новосибирск, Академгородок: Институт вычислительной математики и математической геофизики СО РАН, 2012. – С. 99.

[19] Попов, Н.С. Краевые задачи для неклассических уравнений третьего порядка с нелокальными граничными условиями интегрального вида / Н.С. Попов // Тезисы докладов Международной конференции «Актуальные проблемы прикладной математики

и информационных технологий - аль-Хорезми 2012»: Секция № 2 «Дифференциальные уравнения и динамические системы» / Гл. ред. М.М. Арипов – Ташкент, «НУУз им. М. Улукбека», 2012. – С. 34–35.

[20] Попов, Н.С. Разрешимость нелокальных краевых задач для псевдогиперболических уравнений / Н.С. Попов // Материалы 51-й Международной научной студенческой конференции «Студент и научно-технический прогресс»: Математика / Новосиб. гос. ун-т. – Новосибирск, 2013. – С. 98.

[21] Попов, Н.С. Исследование разрешимости краевых задач для многомерных псевдогиперболических с нелокальным граничным условием интегрального вида / Н.С. Попов // Материалы Международного молодежного научного форума «Ломоносов-2013»: Подсекция «Дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление» / Отв. ред. А.И. Андреев, А.В. Андриянов, Е.А. Антипов, К.К. Андреев, М.В. Чистякова. [Электронный ресурс] – М.: МАКС Пресс, 2013. – С. 16.

[22] Попов, Н.С. Исследование разрешимости нелокальных краевых задач для псевдогиперболических уравнений / Н.С. Попов // Дифференциальные уравнения. Функциональные пространства. Теория приближений. Международная конференция, посвященная 105-летию со дня рождения С.Л. Соболева (Новосибирск, 18–24 августа 2013 г.): Тез. докладов / Ин-т математики им. С.Л. Соболева СО РАН. – Новосибирск, 2013. – С. 227.

[23] Попов, Н.С. О разрешимости нелокальных краевых задач для неклассических уравнений третьего порядка / Н.С. Попов // VII Международная конференция по математическому моделированию. Тез. докл. / Под редакцией И.Е. Егорова, Ф.М. Федорова – Якутск: ОАО «Компания Дани-Алмас», 2014. – С. 61–62.

[24] Попов, Н.С. Об одной нелокальной краевой задаче для многомерного псевдогиперболического уравнения / Н.С. Попов // Материалы 52-й Международной научной студенческой конференции «Студент и научно-технический прогресс»: Математика / Новосиб. гос. ун-т. – Новосибирск, 2013. – С. 93.

Пописано в печать 00.00.2015 г. Формат 60x84/16.
Печ.л. 1,0. Уч.-изд. л. 1,19. Тираж 100 экз. Заказ 00.

Отпечатано в филиале издательства СВФУ,
Институт математики и информатики СВФУ.
Адрес: г.Якутск, ул. Кулаковского, 48. Тел.: (4112) 496833